探析跨阶不等式的证明策略

——以一道莆田市2021届高三质检题为例

卓晓萍　　蔡海涛

（福建省莆田第二中学，351131）

本文系2020年福建省电化教育馆课题《基于动态数学技术环境高中实验教学的实践研究》（课题编号闽教电馆KT2042）研究成果.

近年来，指数、对数、三角组合型的函数不等式问题在高考及各地高三质检试题中频频出现，这类问题由于指、对数跨阶，或是指、对数与三角跨阶，在利用导数工具进行求解时，由于求导时式子较为复杂，往往还含有超越式，学生难以作答.本文以一道莆田市2021届高三质检题为例，谈谈这类问题的求解策略，期与同行交流.

一、试题呈现

（莆田市2021届高三第一次质检22题（2））已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}$.

证明：$f(x)<x^2-\ln x-\dfrac{3}{4}\sin x$.

二、试题分析

本题以初等函数为载体，考查利用导数证明不等式(含有对数与三角跨阶)的基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力与创新意识，考查函数与方程思想、化归与转化等思想，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现综合性、应用性、创新性.

三、解法赏析

解法1 $f\left(x\right)-\left(x^2-\ln x-\dfrac{3}{4}\sin x\right)=2\ln x-\dfrac{x}{e}-x^2+\dfrac{3}{4}\sin x$

易证 $\ln x\le x-1$，且 $\dfrac{3}{4}\sin x\le\dfrac{3}{4}$，

所以 $2\ln x-\dfrac{x}{e}-x^2+\dfrac{3}{4}\sin x\le 2\left(x-1\right)-x^2-\dfrac{x}{e}+\dfrac{3}{4}=-\left(x-1\right)^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{e}<0$，原不等式成立.

评析 本题含对数与三角跨阶,若用常规方法，把要证式子的右边移项到左边构造一个函数，证该函数的最大值小于0，由于含两个超越式，将难以解决.本法是对“$\ln x$”及“$\sin x$”两个式子进行放缩，转化为“非超越式”，从而突破了本题的难点.

解法2 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$，且当 $x\in\left(0,e\right),f'(x)>0;x\in\left(e,+\infty\right),f'(x)<0.$

所以 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(e\right)=0$，设函数 $g\left(x\right)=x^2-\ln x,g'\left(x\right)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),g'(x)<0;x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right),g'(x)>0.$

所以 $g\left(x\right)_{\min}=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{e}=\dfrac{3}{4}$，

因为 $\dfrac{3}{4}\sin x\in\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right]$，所以 $x^2-\ln x-\dfrac{3}{4}\sin x>0$，

又 $f(x) \le f(x)_{\max} = 0$，所以 $f(x) < x^2 - \ln x - \dfrac{3}{4}\sin x$.

评析 本法考虑式子的左右两边的最值，只须证左边的最大值小于右边的最小值，易得左边的最大值为 0，故证右边式子大于 0，由于 $\sin x \in [-1,1]$，故只须证 $x^2 - \ln x > \dfrac{3}{4}$ 即可，把跨阶的两个超越函数转化为只含有一个超越函数，突破了本题的难点. 本解法从要证式子的充分条件入手分析, 得到解决问题的途径.

解法 3 由 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-x}{ex}$，易得 $f(x) \le f(e) = 0$. 当 $x > 0$ 时, 易得 $\sin x < x$.

所以 $x^2 - \ln x - \dfrac{3}{4}\sin x > x^2 - \ln x - \dfrac{3}{4}x > x^2 - \ln x - x$.

令 $h(x) = x^2 - \ln x - x, h'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$,

则当 $x \in (0,1), h'(x) < 0; x \in (1,+\infty), h'(x) > 0.$ $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减；在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

$h(x) \ge h(1) = 0$，所以 $x^2 - \ln x - \dfrac{3}{4}\sin x > 0$，所以 $f(x) < x^2 - \ln x - \dfrac{3}{4}\sin x$.

评析 解法 3 的基本思路同解法 2，都是对“ $\sin x$ ”进行放缩，减少超越式，区别之处是放缩的方法不同，法 2 是利用“ $\sin x \le 1$ ”，而法 3 是利用“当 $x>0$ 时，$\sin x < x$ ”，应用这种方法是基于对该不等式及不等式“ $\ln x < x^2 - x$ ”掌握的熟练程度. 教师平时要引导学生从数和形两个特征记住常见不等式的模型，那么在解决不等式证明有关问题时就有的放矢了.

解法 4 研究函数 $g(x) = 2\ln x - \dfrac{x}{e} - x^2$ 与 $\varphi(x) = -\dfrac{3}{4}\sin x$ 的值域.

$g'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{e} - 2x = \dfrac{-2ex^2 - x + 2e}{ex}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $-2ex^2 - x + 2e = 0$,

$\Delta = 1 + 16e^2 > 0$. 令 $h(x) = -2ex^2 - x + 2e$,

对称轴 $x = -\dfrac{1}{4e} < 0, h(\dfrac{1}{e}) = -\dfrac{3}{e} + 2e > 0, h(1) = -1 < 0$,

所以存在 $x_0 \in \left(\dfrac{1}{e}, 1\right), h(x_0) = 0$，即 $-2e{x_0}^2 - x_0 + 2e = 0$,

则当 $x \in (0, x_0), g'(x) > 0; x \in (x_0, +\infty), g'(x) < 0.$

$g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增；在 $(x_0, +\infty)$ 单调递减.

$g(x) \le g(x_0) = 2\ln x_0 - \dfrac{x_0}{e} - {x_0}^2 = 2\ln x_0 - \dfrac{x_0}{e} + \dfrac{x_0}{2e} - 1 = 2\ln x_0 - \dfrac{x_0}{2e} - 1$,

令 $t(x) = 2\ln x - \dfrac{x}{2e} - 1 \quad x \in \left(\dfrac{1}{e}, 1\right), t'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{4e - x}{2ex},$

当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，$t(x)<t(1)=-\frac{1}{2e}-1<-\frac{3}{4}$.

所以 $g(x)\le g(x_0)=t(x_0)<-\frac{3}{4}\le-\frac{3}{4}\sin x$，所以原不等式成立.

评析　本法是把"$\ln x$"与"$\sin x$"跨阶的两类函数隔离在不等式的两边，从而把问题转化为求函数 $g(x)=2\ln x-\frac{x}{e}-x^2$ 的最大值，进而对 $g(x)$ 求导利用隐零点求得其最值.

三、变式拓展

1. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$, 它的导函数为 $f'\left(x\right)$. 证明：$f\left(x\right)<e^x+\cos x-1$.

证明：令 $g\left(x\right)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}\ \left(x>0\right)$，易证 $g\left(x\right)>0$, 即 $-\frac{x^2}{2}<\cos x-1$

故要证原不等式成立，只须证 $x\ln x<e^x-\frac{x^2}{2}$, 令 $h\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}, g\left(x\right)=\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}$

即证 $h\left(x\right)<g\left(x\right)$，因为 $h_{\max}\left(x\right)=h\left(e\right)=\frac{1}{e}<g_{\min}\left(x\right)=g\left(2\right)=\frac{e^2-2}{4}$，故原不等式得证.

2. 函数 $f\left(x\right)=e^x-x-1$，$g\left(x\right)=e^x\left(ax+x\cos x+1\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的极值，并证明，当 $x>-1$ 时，$\frac{1}{e^x}\le\frac{1}{x+1}$；

（2）若 $a>-1$，证明：当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g\left(x\right)>1$.

解（1）由题意，函数 $f\left(x\right)=e^x-x-1$，则 $f'\left(x\right)=e^x-1$，

易得函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以函数 $f\left(x\right)$ 只有极小值 $f\left(0\right)=0$，无极大值，则 $f\left(x\right)=e^x-x-1\ge0$，即 $e^x\ge x+1$，所以 $x>-1$ 时，$\frac{1}{e^x}\le\frac{1}{x+1}$.

（2）不等式 $g\left(x\right)>1$ 等价于 $ax+x\cos x+1>\frac{1}{e^x}$，$x\in\left(0,1\right)$

由（1），且 $x\in\left(0,1\right)$，得 $\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x+1}$，

所以 $ax+x\cos x+1-\frac{1}{e^x}>ax+x\cos x+1-\frac{1}{x+1}=ax+x\cos x+\frac{x}{x+1}=x\left(a+\cos x+\frac{1}{x+1}\right)$，

令 $h\left(x\right)=\cos x+a+\frac{1}{x+1}$，则 $h'\left(x\right)=-\sin x-\frac{1}{\left(x+1\right)^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，所以 $h(x)>h(1)=a+\frac{1}{2}+\cos 1$，

因为 $\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以，当 $a>-1$ 时，$a+\frac{1}{2}+\cos 1>0$，

所以 $h(x)>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)>1$.

四、方法归纳

利用导数证明跨阶不等式常见的方法有：

1. 直接作差构造新函数：$\forall x\in I, f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$ 把问题转化为新函数的最值问题.

2. 隔离审查双函数的最值：$f(x)_{\min}>g(x)_{\max}\Rightarrow \forall x\in I, f(x)>g(x)$. 难点是以“新函数有界”的眼光对原不等式进行等价变形，从而确立 $f(x)$ 与 $g(x)$. 常见的几个有界（或局部有界）函数：

①$\ln x$ 与 x 组合的函数 $x-\ln x, x\ln x, \frac{\ln x}{x}, \frac{\ln x}{x^2}$；

②e^x 与 x 组合的函数 $e^x-x, xe^x, \frac{x}{e^x}, \frac{e^x}{x}$；

③与 $\sin x$ 组合的函数 $\frac{\sin x}{e^x}, \frac{\sin x}{x}$.

3. 利用常见不等式放缩：$f(x)>H(x)>g(x)\Rightarrow f(x)>g(x)$. 利用放缩法解决零点难求的问题，利用放缩法把复杂函数转化为简单函数. 常见几个不等式：

$\ln x\le x-1, \ln x\le\frac{1}{e}x, e^x\ge x+1, e^x\ge ex, \frac{x}{x+1}\le\ln(x+1)\le x, e^x>\ln x$.

五、巩固练习

1.（2014 年高考全国卷Ⅰ·理 21）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$.（1）求 a,b；（2）证明：$f(x)>1$.

2. 证明：$2\ln x-x^2<\frac{x}{e}-3\sin x$.