一道函数导数试题的源与流

蔡海涛

福建省莆田第二中学

本文系2019年度福建省基础教育课程教学研究课题《核心素养导向下高中数学阅读教学模式的研究》（课题编号:MJYKT2019-106)的研究成果.

摘要:许多高三质检试题源于高考试题的改编，本文以一道高三质检函数导数试题为例，进行多解探究，并对其“源与流”的探索，引领高考复习.

关键词:函数导数　高考试题　源与流

1 试题呈现

（2020厦门市高三质检·理21）已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x-1$， $g\left(x\right)=x^3-1$.

（1）若直线 $l:y=-x+1$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 相切，求实数 a 的值；

（2）用 $\min\left\{m,n\right\}$ 表示 m ，n 中的最小值，设函数 $h\left(x\right)=\min\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}\left(x>0\right)$，讨论 $h\left(x\right)$ 零点的个数.

2 解法探究

（1） $a=-2$.（过程略）

（2）**解法一:**①当 $0<x<1$ 时， $g\left(x\right)=x^3-1<0$ ，所以 $h\left(x\right)\leqslant g\left(x\right)<0$ ，无零点.

②当 $x=1$ 时， $f\left(1\right)=g\left(1\right)=0$ ，从而 $h\left(1\right)=0$ ，故 $x=1$ 为 $h\left(x\right)$ 的一个零点.

③当 $x>1$ 时， $g\left(x\right)>0$ ，则 $h\left(x\right)$ 的零点即为 $f\left(x\right)$ 的零点.

令 $f'\left(x\right)=\dfrac{a}{x}+1=\dfrac{x+a}{x}=0$ ，得 $x=-a$

（i）若 $-a\leqslant 1$ ，即 $a\geqslant -1$ 时， $f'\left(x\right)>0$ ，从而 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递增，

进而 $f\left(x\right)>f\left(1\right)=0$ ，又 $g\left(x\right)>g\left(1\right)=0$ ，所以 $h\left(x\right)>0$ ，

此时 $h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 没有零点.

（ii）若 $-a>1$ ，即 $a<-1$ 时， $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,-a\right)$ 单调递减，在区间 $\left(-a,+\infty\right)$ 单调递增，

因为 $f\left(1\right)=0$， $f\left(-a\right)<f\left(1\right)=0$ ，故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,-a\right)$ 没有零点.

易证当 $x>0$ 时， $\ln x\leqslant x-1$ ，则 $\ln\left(4a^2\right)=2\ln\left(-2a\right)\leqslant 2\left(-2a-1\right)$ ，

所以 $f\left(4a^2\right)=a\ln\left(4a^2\right)+4a^2-1\geqslant a\times 2\left(-2a-1\right)+4a^2-1=-2a-1>0$ ，

故存在 $x_0\in\left(-a,4a^2\right)$ ，进而存在 $x_0\in\left(-a,+\infty\right)$ ，使得 $f\left(x_0\right)=0$ ，即 $h\left(x_0\right)=0$ ，

此时 $h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在唯一零点；

综上可得，当 $a\geqslant -1$ 时， $h\left(x\right)$ 有1个零点；当 $a<-1$ 时， $h\left(x\right)$ 有2个零点.

评注:本题若考虑表示出函数 $h\left(x\right)$ ，则需要对 a 讨论，研究 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的大小关系，情况比较复杂，考虑函数 $g\left(x\right)$ 不含参，故先研究其零点，则得到讨论的分界点，分为“ $0<x<1$ 、 $x=1$ 、 $x>1$ ”等三种情况讨论，突破了本题的第一个难点. 当 $x>1$ 时，由于

$g(x)>0$，故把要求解问题转化为$f(x)$的零点情况，则需对其求导，对参数a讨论，研究其单调性，结合$f(1)=0$，得到零点个数，突破了本题的第二个难点.在含参函数导数问题对参数的讨论中,对参数的讨论分界点的分析尤为重要.

解法二:①当$a\geqslant 0$时，$f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}>0$，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增，而$g(x)=x^3-1$在区间$(0,+\infty)$也单调递增，

故当$0<x<1$时，$f(x)<f(1)=0$，$g(x)<g(1)=0$，从而$h(x)<0$，无零点；

当$x=1$时，$f(1)=g(1)=0$，从而$h(1)=0$，1为$h(x)$的零点；

当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，$g(x)>g(1)=0$，从而$h(x)>0$，无零点；

此时，$h(x)$有1个零点.

②当$a<0$时，由$f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}=0$得$x=-a$，

所以$f(x)$在区间$(0,-a)$单调递减，在区间$(-a,+\infty)$单调递增，

当$0<x<1$时，$g(x)<g(1)=0$，从而$h(x)<0$，无零点；

当$x=1$时，$f(1)=g(1)=0$，从而$h(1)=0$，1为$h(x)$的零点；

当$x>1$时，$g(x)>g(1)=0$，此时只需考虑$f(x)$在$(1,+\infty)$上的零点即可.

若$-a\leqslant 1$即$-1\leqslant a<0$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，从而$f(x)>f(1)=0$，从而$f(x)$无零点进而$h(x)$无零点，此时$h(x)$在$(0,+\infty)$上共有1个零点.

若$a<-1$时，与法一同可得$h(x)$在$(1,+\infty)$上存在唯一零点；

综上可得，当$a\geqslant -1$时，$h(x)$有1个零点；当$a<-1$时，$h(x)$有2个零点.

评注:法二从研究函数$f(x)$的零点入手，求导后结合定义域对参数a讨论.当$a<0$时，结合函数$g(x)$的零点情况，难点为$f(x)$在$(1,+\infty)$上的零点研究，基本思路同法一.

3 高考探源

（2015年高考全国卷Ⅰ•理21）已知函数$f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4},g(x)=-\ln x$.

（1）当a为何值时，x轴为曲线$y=f(x)$ 的切线；

（2）用$\min\{m,n\}$表示m，n中的最小值，设函数$h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$，讨论$h(x)$零点的个数.

解（1）$a=-\frac{3}{4}$.(过程略)

（2）当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)=-\ln x<0$，从而$h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\leqslant g(x)<0$，故$h(x)$在$(1,+\infty)$无零点.

当 $x=1$ 时，若 $a\geqslant-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}\geqslant 0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 $x=1$ 是 $h(x)$ 的零点；若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}<0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 $x=1$ 不是 $h(x)$ 的零点.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的零点个数.

（ⅰ）若 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant 0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在 $(0,1)$ 无零点，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调，

而 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，

所以当 $a\leqslant-3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点；当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 无零点.

（ⅱ）若 $-3<a<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 单调递减，在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{3}},1\right)$ 单调递增，

故当 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时，$f(x)$ 取的最小值，最小值为 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

①若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 无零点；

②若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点；

③若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由于 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，

所以当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 有两个零点；当 $-3<a\leq-\frac{5}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点.

综上，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点.

4 变式拓展[1]

已知函数 $f\left(x\right)=2x^3-3x^2+1,g\left(x\right)=kx+1-\ln x$.

（1）若过点 $P\left(a,-4\right)$ 恰有两条直线与曲线 $y=f\left(x\right)$ 相切，求 a 的值；

（2）用 $\min\left\{m,n\right\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\left\{f(x),g(x)\right\}(x>0)$，若 $h\left(x\right)$ 恰有三个零点，求实数 k 的取值范围.

解（1）设切点为 $Q\left(t,f\left(t\right)\right)$，

因为 $f'\left(x\right)=6x^2-6x$，所以切线的斜率为 $f'\left(t\right)=6t^2-6t$

所以切线方程为 $y-f\left(t\right)=\left(6t^2-6t\right)\left(x-t\right)$. 因为切线过点 $P\left(a,-4\right)$，

所以$-4-f(t)=(6t^2-6t)(a-t)$，整理得$4t^3-(3+6a)t^2+6at-5=0$.（※）

又因为曲线恰有两条切线，即方程(※)恰有两个不同解.

令$H(t)=4t^3-(3+6a)t^2+6at-5$，得$H'(t)=12t^2-(6+12a)t+6a$，

令$H'(t)=0$，得$t_1=\dfrac{1}{2}$，$t_2=a$.

①当$a=\dfrac{1}{2}$时，$H'(t)\geqslant 0$，函数$H(t)$在$\mathbf{R}$上单调递增，没有两个零点，不合题意；

②当$a>\dfrac{1}{2}$时，当$t\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(a,+\infty)$时，$H'(t)>0$，当$t\in\left(\dfrac{1}{2},a\right)$时，$H'(t)<0$，

所以$H(t)$在区间$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$和$(a,+\infty)$单调递增，在区间$\left(\dfrac{1}{2},a\right)$单调递减，

要使$H(t)$在$\mathbf{R}$上有两个零点，则$\begin{cases}H\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,\\ H(a)<0,\end{cases}$或$\begin{cases}H\left(\dfrac{1}{2}\right)>0,\\ H(a)=0,\end{cases}$

因为$H\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{2}a+3a-5=\dfrac{3}{2}\left(a-\dfrac{7}{2}\right)$，

$H(a)=4a^3-3a^2-6a^3+6a^2-5=-2a^3+3a^2-5=-(a+1)(2a^2-5a+5)$

$=-(a+1)\left[2\left(a-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}\right]$，

所以$\begin{cases}a-\dfrac{7}{2}=0,\\ a+1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}a-\dfrac{7}{2}>0,\\ a+1=0,\end{cases}$所以$a=\dfrac{7}{2}$.

③当$a<\dfrac{1}{2}$时，同理可得$\begin{cases}a+1=0,\\ a-\dfrac{7}{2}<0,\end{cases}$或$\begin{cases}a+1<0,\\ a-\dfrac{7}{2}=0,\end{cases}$所以$a=-1$.

综上，$a=-1$或$a=\dfrac{7}{2}$.

（2）$f(x)=2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1)$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点$x=1$.

$g'(x)=k-\dfrac{1}{x}$

①当$k\leqslant 0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

$g(x)$在$(0,+\infty)$上至多只有一个零点，不合题意.

②当$k>0$时，令$g'(x)=k-\dfrac{1}{x}=0$，得$x=\dfrac{1}{k}$，

所以当$x\in\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$时，$g'(x)<0$，当$x\in\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在区间$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$单调递减，在区间$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$单调递增，

所以$g(x)$有最小值$g\left(\dfrac{1}{k}\right)=2+\ln k$.

(i)当$k=\dfrac{1}{e^2}$时，$g\left(\dfrac{1}{k}\right)=0$，$g(x)$只有一个零点，不合题意；

(ii)当$k>\dfrac{1}{e^2}$时，$g\left(\dfrac{1}{k}\right)>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上无零点，不合题意；

(iii)当$0<k<\dfrac{1}{e^2}$时，$g\left(\dfrac{1}{k}\right)<0$，因为$g\left(\dfrac{1}{k}\right)\cdot g(1)=(2+\ln k)(k+1)<0$，

所以$g(x)$在$\left(1,\dfrac{1}{k}\right)$上只有一个零点，设为$x_1$.

若$g\left(\dfrac{1}{k}\right)\cdot g\left(e^{\frac{1}{k}}\right)<0$，则$g(x)$在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上有一个零点，设为$x_2$，

易证$e^{\frac{1}{k}}>\dfrac{1}{k}$　（$\dfrac{1}{k}>e^2$）. 下证$g\left(e^{\frac{1}{k}}\right)>0$.

令$F(x)=e^x-x^2\quad(x>2)$，则$F'(x)=e^x-2x$，$F''(x)=e^x-2>e^2-2>0$，

所以$F'(x)>F'(2)=e^2-4>0$，$F(x)$在区间$(2,+\infty)$单调递增，

所以$F(x)>F(2)=e^2-4>0$，$e^x-x^2>0$，即$e^x>x^2\quad(x>2)$.（※※）

取$x=e^{\frac{1}{k}}$，因为$0<k<e^{-2}$，所以$x>e^2>2$.

$g\left(e^{\frac{1}{k}}\right)=k\cdot e^{\frac{1}{k}}+1-\ln e^{\frac{1}{k}}=k\cdot e^{\frac{1}{k}}+1-\dfrac{1}{k}$.

又因为$\dfrac{1}{k}>e^2>2$，由(※※)可知$e^{\frac{1}{k}}>\dfrac{1}{k^2}$，所以$g\left(e^{\frac{1}{k}}\right)>k\cdot\dfrac{1}{k^2}+1-\dfrac{1}{k}=1>0$.

所以$g(x_1)=g(x_2)=0$. 又因为$g(1)=k+1>0$，$f(x_1)>0$，$f(x_2)>0$，

故$h(1)=f(1)=0$，$h(x_1)=g(x_1)=0$，$h(x_2)=g(x_2)=0$.

从而$h(x)$有三个零点.

综上，k的取值范围为$\left(0,\dfrac{1}{e^2}\right)$.

5　结语

每年高考试题及各地的高三模拟试题，是命题老师智慧的结晶，对这些试题进行深入的探究，探究试题的“源与流”，渗透到高三的教学中去，既能让教学内容更丰富多彩，又能激发学生的学习兴趣，有利于拓展学生的思维，提升学生的素养，对高三的复习备考有很大

的意义.

参考文献:

［1］蔡海涛．零点欲求疑无路　设而不求又一村［J］．福建中学数学，2020(1):41-43.