三招破解复杂三角形问题

蔡海涛
福建省莆田第二中学 351131

“解三角形”问题是三角函数中的主要知识之一，也是高考重点考查内容.纵观近年来的“解三角形”高考试题，往往在一个图形中包含着多个三角形.此类问题图形相对复杂，学生由于对复杂的图形分析不到位或对多个已知条件转化不当，不能顺利解决问题.本文拟从图形特征及已知条件与求解问题之间的转化角度来探析求解策略.

1 从直角三角形入手

例 1 （2019 年高考浙江卷·14）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45^\circ$，则$BD=$____，$\cos\angle ABD=$________.

解 如图 1, 在 RT$\triangle ABC$中，易得$\sin C=\dfrac{4}{5}$，

在ΔBCD中，可得$\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{3}{\sin\angle BDC}$，可得$BD=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$；

因为$\angle CBD=135^\circ-C$，所以$\sin\angle CBD=\sin(135^\circ-C)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，

则$\cos\angle ABD=\cos(90^\circ-\angle CBD)=\sin\angle CBD=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

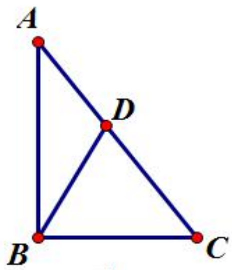

图1

2 选择一个三角形突破

例 2 （2011 年高考天津卷·理 6）如图 2，在$\triangle ABC$中，D是边AC上的点，且$AB=AD,2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，则$\sin C$的值为

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C.$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D.$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

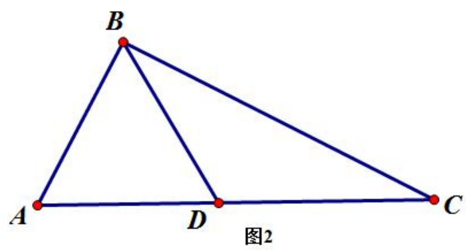

图2

解 设$AB=c$，则$AD=c$，$BD=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}$，$BC=\dfrac{4c}{\sqrt{3}}$，在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$\cos A=\dfrac{c^2+c^2-\frac{4}{3}c^2}{2c^2}=\dfrac{1}{3}$，则$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，在$\triangle ABC$中，

由正弦定理得$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{\frac{4c}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，解得$\sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

例 3 如图 3，在梯形$ABCD$中，已知$\angle A=\dfrac{\pi}{2},\angle B=\dfrac{2\pi}{3},AB=6$，在$AB$边上取点$E$，使得$BE=1$，连接$EC,ED$，$\angle CED=\dfrac{2\pi}{3},CE=\sqrt{7}$.

(1) 求$\sin\angle BCE$的值；（2）求CD的长.

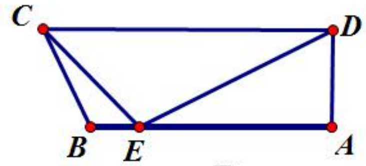

图3

解 (1)在$\triangle CBE$中，由正弦定理得

$\dfrac{CE}{\sin B}=\dfrac{BE}{\sin\angle BCE}$，可得$\sin\angle BCE=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

(2)在$\triangle CBE$中，由余弦定理得$CE^2=BE^2+CB^2-2BE\cdot CB\cos\dfrac{2\pi}{3}$，解得$CB=2$.

又根据余弦定理易得$\cos\angle BEC=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，则$\sin\angle BEC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

$\sin\angle AED=\sin(\dfrac{2\pi}{3}+\angle BEC)=\dfrac{\sqrt{21}}{14},\cos\angle AED=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

在RT$\triangle ADE$中，$DE=\dfrac{AE}{\cos\angle AED}=2\sqrt{7}$，在$\triangle CED$中，由余弦定理易得$CD=7$.

3 探究几个三角形的关系

例4 已知在$\triangle ABC$中，D是BC上的点，AD平分$\angle BAC$，$\triangle ABD$的面积是$\triangle ADC$面积的2倍.

(1)求$\dfrac{\sin B}{\sin C}$；(2)若$AD=1$，$DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求BD和AC的长.

解 （1）$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{1}{2}$.

(2)因为$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=2$，所以$BD=\sqrt{2}$. 在$\triangle ABD$和$\triangle ADC$中，由余弦定理知，

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$, ①

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$, ② 因为$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，

所以①+2×②得$AB^2+2AC^2=6$，又$AB=2AC$，所以$AC=1$.

例5 如图4，在平面四边形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3},AB\perp AD,AC\perp CD$. 若$AD=3AC$，求$AC$.

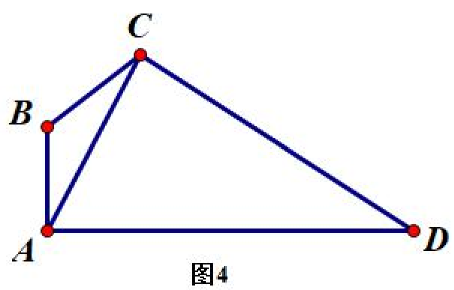

图4

解 设$AC=x,AD=3x$，在RT$\triangle ACD$中，$CD=2\sqrt{2}x$，所以$\sin\angle CAD=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos\angle BAC=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{2}x}$，因为$\angle BAC+\angle CAD=90^\circ$，

所以$\cos\angle BAC=\sin\angle CAD,\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{2}x}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，解得$x=3$，即$AC=3$.

综上知，“解三角形”的复杂图形问题一般是所给的已知条件出现在不同的三角形中，解决办法是先厘清图形中边、角的关系，把已知条件抽象概括后，常有两个方向：（1）把已知量集中在一个三角形中，利用正、余弦定理求解；（2）无法找到求解一个三角形的条件时，需要设出未知量，从几个三角形中列出方程（组），解方程（组）进行求解.